上一章中开发的傅立叶变换适用于在实线上绝对或平方可积分的函数(或的成员).这些类别很大，涵盖了工程和物理学中许多重要的函数，但是有一些令人惊讶的遗漏-sine, cosine,阶跃(step)和signum函数以及x的幂,仅举几例.通过介绍广义函数(本章的主题),将这些函数带入了画面.

最广为人知的广义函数是delta函数,该函数对脉冲现象(例如突然的冲击和点电荷或质量分布)进行建模.本章从某些自然情况开始,自然而然地引入了增量函数.然后,开发了一些操作增量函数并将其用于实际计算的操作规则.这导致对广义函数的更广泛讨论.结果表明,到目前为止,我们使用过的所有普通函数,甚至更多,实际上都是广义函数.以及诸如delta函数之类的对象,其行为违背了“函数”的传统定义.所有广义函数都具有所有阶的导数-连续性不再是限制.所有广义函数都具有傅立叶变换,它们本身就是广义函数-可集成性不再是障碍.本章以广义函数为基础,回顾了采样和傅里叶级数.这将统一周期和非周期性函数,有限和无限序列的傅里叶分析-到目前为止我们所做的一切.

**6.1脉冲信号和频谱** 2021年4月13日19点10分——2021年4月28日09点51分

我们从回到线性,时不变系统的主题开始.在5.5.2节中,我们看到了一阶微分方程的响应

到一个矩形脉冲为

当变得非常大时,使得脉冲持续时间与系统时间常数相比非常短,可以看到响应接近极限:

解释为RC电路,这对应于电容器的瞬时充电,然后是指数放电.

现在,让我们再次解决问题,但是这次使用三角形输入脉冲.微分方程的解是

如图6.1所示.当三角形脉冲宽度与系统的时间常数相当时,响应的上升时间与衰减时间相当,并且脉冲的形状对响应有显着影响.但是,当增加到时,上升时间与衰减时间相比可以忽略不计.当时,与矩形脉冲一样,对三角脉冲输入的响应的极限为.显然,一旦脉冲变得足够窄,脉冲的精确形状就无关紧要了.

现在,我们非正式地将具有最小宽度和单位面积的脉冲称为单位脉冲,并写出表示在时施加的单位脉冲.脉冲的物理作用是立即改变系统脉冲的状态(例如电容器电压).脉冲的面积决定了响应在开始衰减之前上升的幅度.在之前,输出为.在处施加了脉冲,紧随其后的输出为.响应于脉冲,输出中存在跳跃不连续性.

当使用阶跃输入驱动感应电路时,也会发生类似情况.串联RL电路中电感两端的电压服从微分方程

令并写,所以

阶跃函数在时是不可微的.我们通过用一系列的斜坡近似阶跃来解决这个问题(图6.2).一个这样的斜坡的导数近似于阶跃函数的导数,为.现在,微分方程近似为

在系数内,这是较早求解的微分方程.的解为

驱动函数瞬间改变电感电压.我们期望这是有实际根据的;电感器电压瞬时变化,以抵抗其电流的瞬时变化.从数学上讲,似乎阶跃函数的导数与脉冲具有相同的效果,而不是将阶跃视为不可微,我们可以说.

对于第三个示例,我们考虑 f（x）= cos 2𝜋ax的傅立叶变换。 该函数在ℝ上不可积分，但函数具有高斯收敛因子

是可积的，并且当n→∞时，该序列收敛到f。 使用调制和膨胀定理，我们可以轻松地计算一系列变换：

此序列在图6.3中作图。有两个以𝜈 =±a为中心的高斯脉冲，每个脉冲的高度为n ∕ 2，宽度与1 ∕ n成比例，面积为1∕2。根据L2中傅立叶变换的定义，该序列的极限应为傅立叶变换F。但是，尽管每个函数fn是平方可积的，但极限f（x）= cos 2𝜋ax却不是。相应地，尽管函数Fn分别位于L2（ℝ）中（根据Parseval的公式），但它们会以n→∞的形式爆炸，无法收敛为普通函数。另一方面，傅立叶变换Fn集中在𝜈 =±a附近。如果我们取整数个cos 2𝜋ax周期，并计算傅里叶级数，则结果将是一对在𝜈 =±a处的谱线。高斯脉冲趋于非常高和变细的趋势，类似于序列fn接近“纯”余弦的线谱，这似乎是正确的。从前面两个例子中得到一个提示，我们可以说高斯脉冲变成了一对脉冲，因为n→∞且（临时）写为

表示余弦谱。 为了证明这不仅是一厢情愿的想法，我们将使用矩形序列n rect n calculate来表示脉冲来计算傅里叶逆变换（您很可能会再次使用高斯怀疑）。 然后，余弦的傅立叶变换近似为

使用位移和膨胀定理的逆变换是

在n→∞的极限中，sinc变宽，并在任何地方都接近sinc（0）= 1，只剩下cos（2𝜋ax）。 在现实世界中，不存在无限高和窄的脉冲。 但是，有许多物理量很大的例子，它们为脉冲提供了有用的理想化，例如突然的冲击，电压尖峰，频谱线，点质量，点电荷，偶极矩和点辐射器。 下一部分使用一系列脉冲表示法，为脉冲提供了一种操作定义，并提供了一组数学上进行操纵的规则。

**6.2坚果壳中的DELTA函数** 2021年4月14日09点20分——2021年4月28日10点55分

前面的示例显示了三种表现出脉冲行为的不同脉冲序列:矩形（n rect（nx））∞n = 1，三角形（n ^（nx））∞n = 1和高斯（ne-𝜋n2x2）∞n = 1。 脉冲都具有高度n，与1 ∕ n成正比的宽度和单位面积。 靠它们自身，它们可以无限制地增长，并且不能被视为在极限内收敛到任何合理的功能。 但是在RC和RL电路的示例中，物理阻尼效应会涂抹（积分）脉冲并产生最终结果，这些结果在物理和数学上都是合理的。 在傅里叶变换的例子中，模拟脉冲频谱的脉冲序列同样通过逆变换积分而被“驯服”。

通过脉冲序列定义

然后，让我们考虑最简单的计算，该计算涉及脉冲脉冲序列，矩形脉冲n rect（nx）并与连续函数f（x）积分（图6.4）：

整数nf（x）在区间（− 21n，21n）上以其最大值和最小值为上下边界。 积分同样被困在两个值之间，

作为积分序列极限的简写，我们写

符号𝛿（x）称为单位脉冲或增量函数。 我们知道，𝛿（x）不能解释为脉冲序列的逐点极限，因为我们已经看到，该序列无限制地增长。 相反，积分∫in（x）f（x）dx只是一个符号，对于等式6.2中积分序列的极限值，它是一种方便的表示法。

公式6.2并不是唯一的脉冲定义。 如果我们使用三角脉冲nΛ（nx），则推导将基本相同。 并且通过不同的论点2表明，高斯脉冲具有相同的性质：

实际上，任何“尖峰”单位面积函数都可以制成脉冲序列（图6.5）。

您可能已经听说过以这种方式定义的增量功能：它具有无限的高度，零宽度和单位面积。 这是有问题的，因为高度×宽度=面积，但是语句“∞×0 = 1”没有意义。 更确切地说，）（x）是某个单位面积脉冲序列n𝜓（nx）的极限，如n→∞，但是我们必须对此进行限定：脉冲序列没有极限函数，但是 积分序列∫−∞∞n𝜓（nx）f（x）dx确实有一个极限值，从这个积分极限的意义上来说，可以说n𝜓（nx）→𝛿（x）。 这不是人们期望从功能中获得的正常行为。 实际上，delta函数不是通常意义上的函数，但是其名称在物理学和工程学领域已经根深蒂固，我们将在此处继续使用它。

在大多数应用中，我们可以绕过脉冲序列，并根据其基本过滤特性简单地定义脉冲：

脉冲在脉冲位置x = 0提取或“筛选”出f的值。令f = 1表示reveal具有单位面积：

缩放

设置f = a，一个常数函数，脉冲提取f（0）= a：

将单位冲量按常数a缩放会将其面积更改为a。

移位

用移位脉冲序列执行基本积分可得出移位脉冲的定义：

（显然，假设pre是一个函数并直接在积分∫𝛿（x-b）f（x）dx上执行变量的更改，而不是通过脉冲序列进行解释，这将是有道理的。有关此事的更多信息。） 当f = 1时，我们有∫-∞∞𝛿（x-b）dx = 1; 移位后的单位冲量也有单位面积。 单位冲量。（x）用单位高度的箭头图形表示，如图6.6所示。 面积为a的按比例缩放的脉冲a）（x）绘制为高度为a的箭头。 在x = b处绘制了单位偏移量𝛿（x-b）作为单位高度箭头。

膨胀

我们可以通过一个扩张的脉冲序列（例如n rect（nax））来定义一个扩张的脉冲𝛿（ax）。 脉冲仍在x = 0处居中，并且仍将以n→∞的形式出现脉冲，但它们的面积为1 | a |。 而不是团结。 它们不再代表单位冲量，而是比例冲量1 | a | 𝛿（x）。 正式地，

非线性膨胀

令h（x）是在点x = c处过零的连续函数：h（c）= 0，h'（c）≠0。我们可以考虑对增量函数𝛿（h）进行更一般的扩张 （x）），其中𝛿（ax + b）是特例。 我们知道，delta函数位于其参数为零的位置。 在这种情况下，x = c。 在x = c附近，h近似为一阶，即h（x）= h（c）+ h'（c）（x-c）= h'（c）（x-c）。 然后𝛿（h（x））= 𝛿（h'（c）（x − c）），并使用公式6.7，

如果h有多个零交叉点ck，则𝛿（h（x））在每个根处产生一个脉冲.

冲动与脚步

U'（x）= 𝛿（x）的语句怎么样？ 双方融合意味着

如果为简单起见，通过矩形脉冲序列（n rect nx）对脉冲进行建模，则很容易理解方程式6.9在说什么。 整合，我们获得

随着n→∞且矩形变得越来越窄，x = − 1 2n和x = 1 2n之间的斜率变得更陡峭（斜率n）和更窄（宽度1 ∕ n）。 x> 1 2n的积分始终为1，因为脉冲具有单位面积。 在极限情况下，结果为阶跃函数。 当我们对一个增量函数进行积分时，直到x = 0−时才有贡献。 越过德尔塔函数，我们立即收集其所有面积，并且x> 0+时没有进一步的贡献。 阶跃与脉冲之间的关系使我们能够定义具有跳跃间断的函数的导数。

Delta函数的导数

假设我们用矩形序列n rect（nx）表示增量函数。 此矩形脉冲的导数为n𝛿（x + 1 ∕ 2n）-n𝛿（x-1 ∕ 2n）-在矩形的前边缘为正脉冲，在后边缘为负脉冲。 这个序列有有意义的限制吗？ 为了找出答案，我们将其与一个连续函数集成在一起：

当n→∞时，它变为导数：

我们通过𝛿（x）的脉冲序列的导数定义增量函数function'（x）的导数，并指定运算规则

傅立叶变换

让我们将筛选属性（6.3）应用于傅立叶逆变换。 傅立叶核e + i2𝜋𝜈x是连续的，因此我们可以将脉冲插入傅立叶逆变换，从而获得

我们不能将前向变换作为普通积分执行，因为f（x）= 1并非绝对可积分。 相反，将模型f作为函数序列的极限，fn（x）= e−𝜋（x ∕ n）2; 如n→∞，fn→1。使用膨胀定理，fn的傅立叶变换为：

定义脉冲的序列（图6.5）。

通过相同的计算，移位后的脉冲𝛿（a-a）的傅立叶逆变换为ei2𝜋ax。 通过傅立叶变换的线性，

这些转换如图6.9所示。 我们甚至可以计算𝛿'的傅立叶变换：

根据傅立叶变换的导数定理，这个结果应该不足为奇。 重复的变换定理，公式5.5，然后得出结果x i-1 i2𝜋 𝛿'（𝜈）。 多么有趣-x不可积分，但是具有傅立叶变换！

收集我们的结果，我们有几个新的转换对：

通过线性，我们期望由傅立叶级数（即周期函数）定义的函数f的傅立叶变换为

目前，我们将假定无限级实际上可以逐项进行傅立叶变换。 为了计算复指数的傅立叶变换，我们将膨胀定理与方程式6.12和6.7结合使用：

最后，我们有

傅立叶频谱是一组离散的频谱线，由位于谐波频率处的脉冲表示。

卷积

从筛分性质也得出卷积结果。 考虑

如果f在任何地方都是连续的（以后我们将看到可以删除连续性要求）。 卷积与增量函数的作用是使f沿x轴移动a。 记住乘积和卷积f𝛿和f ∗ 𝛿的区别的一种方法是

乘法筛选，卷积移位。

假设卷积定理在涉及三角函数时适用（确实如此），我们可以在频域中看到

与移位定理一致。

这完成了用于操纵增量功能的基本操作规则集。 表6.1和本章末尾对它们进行了总结.

6.3 广义函数 2021年4月14日10点12分

自19世纪以来,就已经直观地理解了增量函数和相关的数学对象,并将其用于物理和工程领域.基尔霍夫（Kirchoff）使用一系列高斯脉冲来模拟发散球面波起源处的奇点.Heaviside在分析电报电缆时使用了阶跃函数及其导数.狄拉克（Dirac）在量子力学的发展中,使用德尔塔（delta）函数来表示具有连续而不是离散索引的函数族的正交性.回想一下,对于傅立叶级数,我们写了⟨ei2𝜋nx，ei2𝜋mx⟩ = 𝛿 [n-m]，单位样本或克罗内克德尔塔.如我们将看到的,傅立叶变换的等效语句是⟨ei2𝜋𝜈x，ei2𝜋𝜇x⟩ = 𝛿（𝜈 − 𝜇），使用“狄拉克增量”.

这些早期的应用程序主要基于物理直觉。结果的物理正确性证明了计算的正确性。在20世纪中叶，Schwartz为他所谓的分布建立了严格的数学结构。十年后，莱特希尔（Lighthill）提出了广义功能理论，这是基于上一节中我们遵循的物理上引人入胜的功能序列方法的仔细发展而得出的。我们先前对U'= observation的观察表明，像阶跃函数这样的普通函数和像delta函数这样的冲动对象之间的距离实际上并没有那么远。我们在本节中的目标是通过广义函数理论为两者提供一个通用的框架。增量函数是广义函数的最著名示例，并且上一部分的脉冲序列方法足以获得其最重要的特性，包括傅立叶变换。我们将看到普通函数，包括非可积分函数（例如step和signum）以及L2中的所有函数，也是通用函数。

6.3.1函数和广义函数 2021年4月14日10点18分

我们知道函数f是从一组数字（例如ℝ或[a，b]）到另一组数字（例如ℝ或ℂ）的映射。 在基本演算中，两个函数f和g对于它们共同域中的所有x，如果在点上一致，则f（x）= g（x）相等。 等效地，如果它们的差为零，则f = g，对于所有x（f − g）（x）= 0。 当我们开始看待范数空间时，我们用范数对等的概念来增强这种严格的逐点相等性：范数空间中的两个函数在某些点上可能有所不同（包含一组度量零），但是如果′f- g′= 0。

当我们在上一节中遇到增量功能时，我们失去了这些接触点。函数𝛿n（x）= n rect（nx）的函数序列（不是我们定义的函数）不是柯西（尝试），当x≠0收敛到零时，它在x = 0处发散。是没有明确定义的函数，无论是按点数还是范数均是𝛿 n（x）的极限。但是我们确实发现，由积分∫𝛿n（x）f（x）dx产生的数字序列是收敛的，这就是我们将序列（𝛿n）的极限定义为𝛿的方式。我们还看到that n可以使用多个脉冲序列（例如，n rect（nx），nΛ（nx）），结果相同，因此在这种意义上，即使序列的各个成员是相同的，它们也是等效的肯定不相等：按照我们熟悉的标准，n rect（nx）≠nΛ（nx）逐点或范数化（例如，计算“ n rect（nx）-nΛ（nx）” 1）。关于内积空间的以下定理表达了考虑等效函数的另一种方法。

定理6.1 令V为内积空间.当且仅当所有向量，∈V的⟨f，𝜑⟩ =⟨g，。时，两个向量f，g∈V是等价的。

定理表明，函数f的特征不在于其值（x与f（x）的表），而在于其内积与所有函数在某个空间中的关系（a与⟨f的表，𝜑 ⟩）。我们可以认为f指定的映射不是从ℝ到ℂ，而是从V到ℂ。函数𝜑∈V“测试” f并根据内积⟨f，𝜑⟩产生一组特征数。如果将另一个函数g应用于相同的“测试函数” makes时，其内部积与f相同，则认为g等效于f。等效的概念在系统理论中具有类推性。如果您有一个“黑匣子”，其中包含未知的组件组合，则可以通过应用测试输入（例如，使用正弦波发生器）并测量输出的幅值和相位来对其进行表征。根据您的测量，您可能会假设该盒子包含一个RC电路，其时间常数为RC = 1，为一秒。但是，它也可能是RL电路，其时间常数为L ∕ R = 1（图6.10）。还有其他方法可以区分电路，但是如果它们对正弦测试输入的响应相同，则必须认为它们与这些测试输入等效。这种新方法-通过对一组测试函数的操作来表征映射-为普通函数和增量函数提供了共同点。我们可以绘制如下关系：

当我们编写一个普通函数时，

在编写时，对于一个普通函数，我们在表达式的两边都有普通函数的实际积分。 当我们写∫𝛿（x）𝜑（x）dx（有或没有积分极限）时，它不是实际积分，而是表示积分序列极限的方便符号：

在这两种情况下（普通函数和增量函数），基础模型都是一系列普通函数，它们产生一个收敛的整数序列，不是从数字到数字的映射，而是从测试函数到数字的映射。 从函数到数字的映射（“函数的函数”）被称为函数。我们可以写T [𝜑]来表示通过对具有函数T的输入函数operating进行运算而获得的数字。 函数实际上是增量函数，定义为T𝛿 [𝜑] = 𝜑（0）。 功能的重要类别包括内部产品生成的功能：

对于输入函数𝜑1，，2和常数a，b，此类函数是线性的，其中T [a𝜑1 + b𝜑2] = aT [𝜑1] + bT [𝜑2]。 它们也是有界的（受Holder不等式的约束）并且是“连续的”，这意味着，如果（𝜑k）是收敛于零的函数序列，则序列（T [𝜑k]）也收敛于零。 定义广义函数的一种方法是在一系列测试函数上使用线性连续函数。 出于我们的目的，这有点抽象，因此我们将遵循与上一部分中的delta函数开发类似的不同路径。

6.3.2广义函数作为函数序列 2021年4月14日10点55分

指定一组测试功能是构建通用功能理论的第一步。 特别是一个函数空间最适合开发用于傅立叶分析的通用函数。 它们被称为Schwartz函数或（通常是）良好函数。 接下来定义这些和其他三个重要的函数类。 表6.2给出了这些类的一些常见示例。

定义6.1（快速下降，缓慢的生长，相当好的状态和良好的功能）。 令f：ℝ→ℂ为函数。

如果f及其所有导数的衰减快于（1 + x2）−N的| x |，则f具有快速下降或迅速下降的趋势。 →∞，对于所有N。

如果f可以通过除以多项式使其可积（L1），则可以缓慢增长或缓慢增长，例如，

如果f是无限连续可微的，并且它及其所有导数正在缓慢增长，则f是一个很好的函数。

如果f是无限连续可微且迅速减小的，则f是一个好函数。 好的函数也称为Schwartz函数。

这些函数类的各种属性很容易建立。 这些关系的重点在于，对良好功能执行的常规操作不会影响其“良好”，而通过对具有良好功能的功能进行操作会改善“较差”功能。 证明留给问题。

所有缓慢增长函数的集合都是一个向量空间（表示为K）。

所有良好函数的集合是一个向量空间（表示为S）。

好的函数的导数是好的。

两个好的函数的和，乘积或卷积是好的。

一个功能还不错的产品和一个功能良好的产品是好的。

缓慢增长的函数和良好的函数的乘积是有界的，绝对可积，并且随着| x |变为零。 →∞。

快速下降的函数和良好的函数的卷积是好的。

缓慢增长函数和良好函数的卷积可以无限连续地微分。

显然，良好的函数属于L1和L2（实际上，对于所有p≥1都是S⊂Lp），并且属于L1⊂K。我们应该为测试函数选择良好的函数S。8它们是如此的平滑并迅速衰减，我们可以不受惩罚地进行移动，扩张，区分等等。而且，好的函数的傅立叶变换是好的。要了解原因，请回想一下函数的平滑度与其傅里叶变换的渐近行为之间的密切联系。如果一个函数是r次可微的，则其傅立叶变换会使O（| 𝜈 |-（r + 1））衰减。 （认为​​：rect sinc，Λsinc2和Gaussian⟼Gaussian。）如果函数是无限连续可微的（C（∞）），则其变换的衰变速度将比任何多项式快，即迅速减小。相反，快速递减函数的傅立叶变换为C（∞）。好的函数具有这两个互补的属性，因此它的傅立叶变换也是如此。从下面开始，使用好的函数定义通用函数。

定义6.2（通用功能）。 如果数字（bn）的序列为正，则良好函数的序列（gn）∞n = 0为正则，其中

融合所有良好的测试功能𝜑。 广义函数g是良好函数（gn）的规则序列。 符号∫g（x）𝜑（x）dx被定义为积分序列的极限：

积分∫−∞∞gn（x）𝜑（x）dx将存在，因为thegn很好，因此乘积gn𝜑很好，因此可积分。 正则性问题涉及从积分中得出的值序列的收敛性。 并非每个这样的序列都是收敛的。 例如，高斯脉冲序列（n exp（-𝜋n2x2））具有单位面积，具有测试函数的积分序列收敛于𝜑（0）。 它是一个规则序列，定义了广义函数𝛿（x）。 另一方面，序列（n2 exp（-𝜋n2x2））中的函数具有与n成比例的面积。 尽管它们也是好函数，但它们与测试函数的积分等于n𝜑（0），无限制地增长为n→∞。 该序列未定义通用函数。

序列（gn）也可以收敛于普通函数，无论是逐点还是规范。 如果是这样，我们说它定义了一个常规的广义函数。 如果不是（例如delta函数），我们说广义函数是奇异的。 可以看出，所有普通函数f∈Lp，∞> p≥1，并且所有缓慢增长的函数都是正则广义函数。 因此，广义函数包含了我们在前面各章中使用过的普通函数，尤其是L1和L2中的普通函数，以及缓慢增长的函数和脉冲。 定义6.2中的收敛概念不仅可以应用于功能良好的序列。

定义6.3（弱收敛）。 如果数字序列（bn）表示广义函数序列（fn）弱收敛，则其中

对于所有𝜑∈S收敛。序列（fn）弱收敛到一个广义函数f

例如，𝛿和𝛿'都可以由良好的（基于高斯的）序列表示，但是我们也已经看到，三角函数可以由矩形的弱收敛序列表示，并且三角函数的导数可以表示 通过增量函数的弱收敛序列，𝛿n'（x）= n𝛿（x + 1 ∕ 2n）-n𝛿（x-1 ∕ 2n）。

6.3.3广义函数的微积分 2021年4月14日11点14分

从普通函数到广义函数的扩展需要重新考虑如何进行演算。 本节说明如何为通用函数重新定义熟悉的函数处理方式。

等价

由于通用功能是由其对测试功能的作用定义的，因此对所有测试功能都以相同方式起作用的两个通用功能被认为是等效的。

定义6.4（等同于广义函数）。 令f和g为广义函数。 如果

对于所有测试函数𝜑∈S，它们都是等效的，我们写成f = g。

对于普通函数f和g，除了等价关系外，我们还有缩放（af），加法（f + g），乘法（fg），移位（f（x-b）），扩张（f（ax）），偶数和 奇数对称，实部和虚部以及微分（f'）。 现在我们需要做的是看看这些想法如何扩展到广义函数。 通过对等式的广义定义，对广义函数的操作始终与对普通函数的操作一致。

缩放，添加，移动，扩展

通用功能可以缩放，添加，移动和扩展。 首先，考虑缩放。 如果f是一个普通函数，则af由（af）（x）= a⋅f（x）定义-只需取f（x）的值并将它们乘以a。 我们不能对通用函数执行此操作，因为它可能没有很好的值（请考虑：𝛿（0）=？）。 取而代之的是，我们通过用一系列好的函数代替广义函数，使用普通积分序列，然后取一个极限值来返回广义函数，从而开发出一个一致的定义：

因为fn是一个普通函数，所以我们可以将比例因子从fn传递给𝜑：

缩放测试函数a𝜑仍然是一个好函数，因此我们知道积分的序列将收敛到

因此，我们有了一个缩放的广义函数的定义：

也就是说，af是广义函数，它对检验函数function进行运算，以产生与对具有广义函数f的按比例缩放的检验函数a𝜑进行运算所获得的结果相同的结果。

所使用的方法可能如下所示：

通用函数的结果是通过遍历普通函数的领域获得的。 将相同的方法应用于加法，平移和扩张收益

这些似乎都是直觉的-适用于通用功能的功能也必须适用于普通功能，相反，了解适用于通用功能的一个很好的线索就是考虑适用于通用功能的情况。 在许多情况下，我们可以像对待普通函数一样使用通用函数，而无需显式调用普通函数的基础序列。 但是，如果有疑问，可以总是求助于序列。

偶数和奇数广义函数

像普通函数一样，广义函数即使f（x）= f（-x）也为奇数，如果f（x）= -f（-x）为奇数。 要了解f（-x）对广义函数的含义，请使用a = -1的膨胀定义：

这导致了对测试功能的动作的偶数和奇数的通用定义：

也就是说，即使f在测试功能和测试功能的反向版本上具有相同的作用，也是如此。 如果除了符号翻转外，其他动作相同，这很奇怪。

实虚广义函数

广义函数也可以是实数，虚数或复杂的。 一个虚构的广义函数的简单示例是1 2i𝛿（𝜈 + 1）− 21i𝛿（𝜈 − 1），即sin 2𝜋x的傅立叶变换。 就对测试函数的作用而言，广义函数f是实数，如果

微分

令f是由良好函数（fn）的规则序列定义的广义函数。 导数fn'也很好，我们将通过此序列定义广义导数。 将fn'与测试功能集成：

这是一个普通的积分，可以通过以下部分进行积分：

由于fn和𝜑都很好，因此fn𝜑也是如此，因此（迅速减小）fn𝜑→0为| x |。 →∞，仅在右边保留第二项。 导数𝜑'是一个好函数，仅是另一个测试函数。 因此，右侧的积分序列是收敛的，这表明左侧的积分序列是收敛的。 考虑到双方的极限，我们对广义导数f′有一个定义：

公式6.23表明，广义函数的导数是另一个广义函数，可以始终对其进行微分以产生另一个广义函数，例如，

f的任意数量的导数都可以简单地推到测试函数的导数上。 但是作为良好功能的测试函数可以无限连续地微分，因此积分将始终得到很好的定义。 这表明所有广义函数都具有定义明确的所有阶的广义导数。 我们不再被不连续性所阻挡。 此外，可以证明，每个广义函数（规则的或奇异的）都是连续的，缓慢增长的函数的导数的有限和，反之亦然。

广义函数乘积

本章后面将使用与增量函数f（t）𝛿（t − t0）的乘积来对在时间t0采样函数f的值进行建模。 正确处理这些问题和其他问题的关键是要知道广义函数可以乘以哪种函数。

令f和g为广义函数，形成乘积fg，并写出通常的整数

如果乘积g𝜑是一个好的函数，我们可以将g从fg推到g𝜑，并且对测试函数g𝜑具有有效的f积分：

（如果用序列（fn）表示f，可能会更容易看到这一点。）可以证明，对于任意f，如果函数g相当好（因此乘积fg很好），这将起作用。

定理6.2（普通和广义函数的乘积）。 设f∈S'为广义函数，g为相当好的函数，𝜑∈S为检验函数。 乘积fg是由

一些功能非常接近，例如，step和signum正在缓慢增长，但不连续。 我们仍然可以依靠序列来形成具有这些功能的定义明确的产品。14通过将单位面积的良好函数n𝜌（nx）卷积，可以使具有跳跃间断的缓慢增长的函数无限连续地微分。 当n→∞时，gn（x）= g（x）∗ n𝜌（nx）→g（x）。 或者，我们可能碰巧知道一个连续近似值，例如tanh（nx）很好，而lim n→∞tanh（nx）= sgn（x）。 那么乘积gn𝜑是好的，乘积fg定义为：

广义函数的卷积

当然，卷积很重要，因为需要对信号（包括正弦和余弦）通过线性时不变系统的通过进行建模。 为了对两个广义函数的卷积得出一致的定义，请考虑将积分与测试函数：

并正式更改集成顺序：

如果内部积分在𝜉中表现出良好的功能，则这是一个有意义的表达。 积分是g与𝜑的反向形式的卷积g（-）𝜑。 因此，g必须是一个广义函数，当与一个好的函数卷积时，就可以得出一个好的函数。

定理6.3（广义函数的卷积）。 令f，g为广义函数。 如果对于其中一个（例如g），g ∗∈S，则卷积f ∗ g被定义为广义函数，使得

很容易证明，卷积换向，f \* g = g \* f。 还可以证明，在某些条件下，卷积服从缔合性（f ∗ g）∗ h = f ∗（g ∗ h）.16 f ∗ g作为广义函数的存在保证了下面的广义导数的存在 通常的公式（f \* g）'= f'\* g = f \* g'，可以重复计算所有阶的导数。 此外，可以证明，具有良好函数的广义函数的卷积是无限连续可微的（请参阅问题）。 再一次，我们看到卷积是一种平滑操作，并且良好的函数能够对行为异常的函数进行显着程度的修复。

单面普通函数之所以重要，是因为它们与因果线性系统有关。 例如，考虑两个阶跃函数U（x）\* U（x）的卷积。 直观的计算结果

并且通过检查，它正在缓慢增长，因此它是一个广义函数。 但是，此示例超出了定理6.3的范围，因为

不能保证它是x的良好函数（尽管它具有足够的微分性，但可能不会随着x→∞迅速减小）。 我们可以通过将U写为快速减少的函数序列（例如e-x ∕ nU（x））的极限来解决此问题。 卷积e−x ∕ nU（x）∗ 𝜑（x）很好，定理6.3表示卷积

是广义函数。 根据需要，该序列微弱收敛到xU（x）。

在两个单侧缓慢增长的函数的更一般情况下，让它们都由快速递减的单侧函数的序列fn和gn近似，例如，

然后根据定理6.3，它们的卷积fn ∗ gn将成为广义函数。 序列的弱极限（如果存在）是广义函数，定义为卷积

通过这种操作，可以将两个单侧多项式（单侧正弦波等）卷积，如果它们都是右侧或左侧，例如U（x）∗ xU（x）或U（x − 1）\* cos 2𝜋x U（x），但不是U（x）\* U（-x）。

6.4 广义傅里叶变换 2021年4月14日11点54分

6.4.1定义

对于普通函数，傅里叶变换被定义为一个整数：

根据所涉及的功能空间进行适当的解释。 我们已经看到，如果f是delta函数或delta函数的导数，它也会给出一个有意义的结果。 我们寻求傅立叶变换的定义，该定义通常适用于广义函数。 考虑一下广义函数的良好函数的基本规则序列（fn）。 好的函数的傅立叶变换是一个好的函数（这就是为什么我们选择好的函数来构建广义函数的原因），因此我们对每个fn进行傅里叶变换以获得序列（Fn）。 根据Parseval定理（因为好的函数是平方可积的），

其中𝜑和Φ= F-1 {𝜑}均为测试函数。 右边的积分序列是收敛的，因为（fn）是规则的，因此左边的积分序列也是收敛的，并且（Fn）定义了一个广义函数F，我们将其定义为f的傅立叶变换。 此外，在极限条件下，公式6.34变为

这导致了对广义函数的傅里叶变换的定义。

定理6.4（广义傅里叶变换）。 令f和F为分别由良好函数（fn）和（Fn）的规则序列定义的广义函数。 那么以下语句是等效的：

如果fn⟷Fn，则F是f的傅立叶变换。

当且仅当F是f的傅立叶变换

对于所有傅立叶对𝜑，Φ∈S.

定理6.5（极限中的广义变换）。 令（fn）为广义函数序列，弱收敛至广义函数f。 令Fn为fn的广义傅立叶变换。 然后，变换序列（Fn）弱收敛到广义函数F，即f的傅立叶变换。

6.4.2傅立叶定理 2021年4月14日12点01分

普通函数的许多傅立叶定理适用于广义函数的傅立叶变换。 需要在特定点上求函数的定理（例如面积定理和矩定理）不会延续到广义函数上（∫1 dx = 𝛿（0）？）。 Parseval的定理也不适用，该定理仅适用于L2中的函数。 在这些推导中，傅立叶变换的第二个定义（公式6.35）比第一个使用序列提供了更简单的结果路径。

线性

缩放和添加广义函数的规则立即表明，广义傅里叶变换是线性的：

移位定理

首先记下积分∫f（x − a）Φ（x）dx，并进行变量更改以将位移推入测试函数（公式6.19）：

膨胀定理

使用相同的方法，可以证明f（ax）⟷1 | a | F（𝜈 a）。 验证留给问题。

对称性

我们将证明，如果f是一个实数甚至是广义函数，那么F也是实数和偶数。 其余对称关系的证明遵循相同的逻辑。 因为f是实数并且是偶数，所以我们知道（方程式6.21和6.22）

并且我们想证明F是实数甚至是实数：

这仅是应用定义并注意测试函数的傅立叶变换的问题。 首先，证明F是偶数：

然后证明F是实数：

导数

为了证明导数定理f′（x）⟼i2𝜋𝜈F（𝜈）对于广义傅里叶变换，

现在在Φ′上使用常微分定理：

因为𝜈𝜑（𝜈）好，所以该积分定义明确。 最后，将i2𝜋𝜈的因子推到F（定理6.2）：

下面的例子给出了导数定理的一个特别好的应用。

从傅立叶级数开始，并在第5章继续研究傅立叶变换，我们已经观察到函数的光滑度与其傅立叶变换的渐近行为之间的关系，即𝜈→∞。函数越平滑，其变换在高频下衰减越快。无限连续可微函数具有最快速衰减的变换，以高斯⟷高斯为代表。在另一个极端是分段平滑和分段连续函数，例如三角形和矩形，其变换分别衰减O（𝜈-2）和O（𝜈-1）。故事的结尾是功能具有跳跃性，因为它们是不可区分的。通用功能的设备消除了这一障碍。我们可以保持差异化，保持傅立叶变换，并观察会发生什么（表6.3）。正如所料，信号函数的傅里叶变换为O（𝜈−1），因为它具有跳跃。微分信号产生一个脉冲，其傅里叶变换是恒定的。微分脉冲产生𝛿'，其傅里叶变换实际上随频率O（𝜈）的增加而增加。当平滑度从C（∞）到分段连续到奇异时，傅立叶变换的行为从不停地运行，从快速下降到缓慢衰减再到缓慢增长。

同样的趋势也适用于函数的渐近行为与其傅立叶变换的平滑度之间的关系。 快速下降的函数具有无限平滑的变换。 缓慢衰减的函数sinc x和x-1具有分段常数变换，分别为rect x和i𝜋 sgn 𝜈。 如果我们将缓慢的衰减推过一个常数函数，则该转换是脉冲式的，并且进一步转到缓慢增长的多项式，我们会发现包含脉冲导数的转换。

乘积和卷积

早先，我们为乘积的存在和两个广义函数的卷积确定了充分的条件：

如果具有良好功能的功能之一的乘积是良好功能，则乘积fg作为广义函数存在。

如果具有良好功能的函数之一的卷积为良好函数，则卷积f ∗ g作为广义函数存在。

现在，我们寻找具有卷积定理f ∗ g⟷FG的条件。 广义卷积定理的推导是应用定义的简单练习，并一路观察条件，以确保步骤有效。

将广义傅里叶变换的定义应用于卷积：

然后将定义应用于广义卷积（公式6.31）：

如果g ∗Φ很好，我们可以再次应用傅立叶变换定义：

关键条件是卷积g ∗Φ必须是一个好的函数（这只是f ∗ g首先存在的条件）。 因为g和G是傅立叶对，所以施加在一个上的条件反映在另一个上。 如果g表现得足够好，使得g ∗Φ（x）很好，那么G同样会使得G𝜑（𝜈）很好。 我们有卷积定理的以下版本。

定理6.6（广义卷积定理）。 令f和g为具有傅立叶变换F和G的广义函数，令𝜑，Φ∈S为傅立叶对。 如果g ∗Φ是一个好函数（等效地，G𝜑是一个好函数），则f ∗ g和FG是广义函数，f ∗ g⟷FG，即∫f ∗ g（x）Φ（x）dx = ∫FG（𝜈）𝜑（𝜈）d𝜈。

如果卷积定理不适用于函数本身，则可以适用于序列。 前面我们看到缓慢增长的两个单边函数可能是卷积的，例如，U（x）\* U（x）= xU（x）。 xU（x）的傅立叶变换可以通过频域中的导数定理来计算：

（顺便说一下，傅里叶变换是埃尔米特变换。）但是，这些函数对于卷积定理是有问题的：

U ∗Φ不是一个好的函数。

（1 2 𝛿（𝜈）+ i𝜋𝜈 1）𝜑（𝜈）不是一个好的函数。

（1 2 𝛿（𝜈）+ i𝜋𝜈 1）不能平方。

但是，正如我们对广义卷积的定义所做的那样，我们可以尝试使用序列并取极限。 该方法如下图所示：

用快速递减序列e-x ∕ nU（x）表示阶跃函数，该序列具有傅立叶变换F n（𝜈）= 1 + i2n𝜋n𝜈。 现在e-x ∕ nU（x）∗Φ（x）好，因为指数迅速减小，而n 1 + i2𝜋n𝜈 𝜈（𝜈）也好，因为1 + i2n𝜋n𝜈是无限连续可微的。 因此，广义卷积定理产生

fn ∗ gn和FnGn均为广义函数。 验证这些序列收敛到xU（x）并对其傅立叶变换进行处理才是问题所在。

6.5采样理论和傅立叶级数 2021年4月14日13点16分

第3章介绍了采样函数。通过以规则间隔f [n] = f（nΔx）测量连续函数f的值来创建序列（f [n]），其中Δx是采样间隔。 因为f（x）𝛿（x-a）= f（a）𝛿（x-a），所以可以将采样函数建模为一系列加权脉冲，即f（x）与一系列单位脉冲的乘积。 用fs（x）表示脉冲采样函数，

周期函数f（x）是函数f0（x）以规则间隔x = nL的复制。 在x = a处的f0的单个副本只是一个移位，可以通过带冲量f0（x-a）= f0（x）∗ 𝛿（x-a）的卷积来建模。 然后可以通过将f0与一系列以周期L间隔的脉冲进行卷积来模拟f0到周期函数的无限复制：

无限脉冲序列（我们称为梳齿函数）对于采样和复制都是至关重要的，并通过傅立叶变换将它们连接起来。 本部分的关键结果是，加权脉冲序列（采样函数）的傅里叶变换是周期性的，相反，周期性函数的傅里叶变换是由傅里叶级数系数加权的脉冲序列。 这样可以更完整地了解傅立叶级数，采样，带限函数，混叠和奈奎斯特采样率。 它还允许各种傅里叶表示的“大统一” — DFT，傅里叶级数，离散时间傅里叶变换和（连续时间）傅里叶变换。 我们从用于普通函数的傅立叶变换和傅立叶级数之间的连接开始。

6.5.1傅立叶级数 2021年4月14日13点17分

在第4章中，证明了在有限区间[0，L]上可积分的周期函数f可以具有傅立叶级数表示：

其中L是周期，傅立叶系数是

如果定义了f的单位周期，则可以使傅立叶系数的积分看起来像傅立叶变换：

根据f0及其傅立叶变换F0，傅立叶系数为

以下定理以更一般的形式表达了这一思想。

定理6.7。 令f是一个连续且有界的函数，其衰变速度快于O（| x | -1）| x |。 →∞。 令F = F {f}，并假设它有界且衰变的速度比O（| 𝜈 | -1）为| 𝜈 |。 →∞。 通过用周期L复制f形成周期函数f̃：

则f̃具有傅立叶级数：

这些系列绝对且一致地收敛。

定理6.7的一个推论是泊松求和公式，它是通过在公式6.41中将x设置为0来获得的：

6.5.2周期广义函数 2021年4月14日13点21分

如果f（x + L）= f（x），则函数是周期性的。 广义函数是周期性的，如果

周期性广义函数的一个重要示例是梳子函数：

它是无限冲动列车的简写形式。 可以通过微分周期函数来获得其他周期广义函数。 例如，考虑一下如果您要区分方波或采用三角波的二阶导数会发生什么。 周期广义函数的傅立叶级数具有与普通傅立叶级数相同的形式：

考虑部分和SN（x）= ∑N n = -N cnei2𝜋nx ∕ L，这是一个规则的广义函数。 如果积分的序列是部分和的序列，则弱收敛到广义函数f

收敛为N→∞。 就像我们在公式6.41的推导中所做的那样，对于固定的N，我们可以取求和内的积分，并获得

𝜑 = F-1 {Φ}。 由于𝜑是一个好的函数，因此| n |的值的双重无限序列（𝜑（n ∕ L））迅速减小。 →∞。 傅立叶系数（cn）的序列可以随着| n |的增长而缓慢增长。 →∞，总和∑N n = -N cn𝜑（n ∕ L）仍将绝对收敛为N→∞。

假设我们有一个普通的周期函数f，它的傅里叶级数是绝对一致收敛的（即f在[0，L]上是连续且分段光滑的）。 作为常规的广义函数，可以每次将傅立叶系数乘以i2𝜋n ∕ L来逐项重复求微分。 在k个导数之后，系数序列为（（i2𝜋n ∕ L）kcn），并且永远不会比在n中缓慢增长差。 因此，任何这样的导出级数都将是弱收敛的。 我们得出的结论是，所有周期广义函数均具有弱收敛的傅立叶级数。

写为弱收敛傅立叶级数的周期广义函数也可以逐项进行傅立叶变换。 结果是

梳功能

我们在前面的示例中看到，梳子函数的傅里叶级数为

该级数收敛性较弱，可能逐项进行了傅立叶变换，以得出很好的结果

这也可以不通过傅立叶级数而得出（请参阅问题）。 扩张的梳子函数III（x ∕Δx）为

随着脉冲扩散（Δx增大），其高度（面积）增大（图6.16）。 周期为Δx的单位脉冲序列为

根据膨胀定理，该脉冲序列的傅立叶变换为

梳函数变换对遵循与其他傅立叶变换相同的倒数扩展原理：频域中脉冲的间隔是时域中间隔的倒数。

6.5.3采样定理 2021年4月14日13点26分

采样与复制

采样函数fs（x）由f（x）与扩张梳函数的乘积表示（图6.17）：

采样函数的傅里叶变换是未采样函数的变换的周期性复制。 周期性复制函数的傅立叶变换是基本函数变换的脉冲采样。 采样和复制是一个转换对。 我们已经看到这些关系之一适用于傅立叶级数（定理6.7）。 现在，我们将使用另一个来得出经典结果。

带限功能

如果函数f（x）的傅立叶变换F（𝜈）在高于有限值B的频率frequencies上为零，则为带限。如果f为带限且在L2中，则F∈L2（-B，B），这意味着它 也在L1（-B，B）中（对于有界区间（a，b）调用L2（a，b）⊂L1（a，b），图4.5）。 然后，由于F∈L1（-B，B），f也是有界且连续的（实际上，我们将在第8章中看到带限函数是无限连续可微的，例如，傅立叶变换为rect的sinc）。

采样定理

由于平方可积分带限制函数是有界且连续的，因此它们的样本定义良好。 如下定理所示，在适当的条件下，可以从其样本中重建带限函数。

定理6.8（采样定理）。 令f为带限函数（对于| 𝜈 |> B> 0，F（𝜈）= 0），并具有有限能量f∈L2（ℝ）。 如果Δx<1 ∕ 2B，则可以根据公式从样本f（nΔx）重建f

向量空间解释

采样定理可以解释为L2中的正交展开。 令𝜓n（x）= sinc（x − n）为移位的sinc函数。 sinc函数的膨胀和移位

令VB表示带限为B的平方可积函数的集合。可以证明它是L2的子空间。 𝜓n（x ∕Δx）分别限制在B内并且在L2中。 它们的线性组合也有带宽限制。 实际上，通过采样定理，任何带限的L2函数都可以表示为𝜓n的线性组合。 因此，{𝜓n（x ∕Δx）∕√Δx}n∈ℤ的集合是子空间VB的正交基础。 对于任何函数f∈L2，内积⟨f，𝜓n（x ∕Δx）∕√Δx⟩是f在VB的第n个基向量上的投影，以及f在VB上的正交投影，这是最好的带限 与f的近似值是和：

内积使用Parseval定理，

乘积F（𝜈）rect（Δx𝜈）表示将理想的低通滤波器应用于f，从而将函数限制为| 𝜈 |。 <1 ∕2Δx。 扩展系数⟨f，𝜓n（x ∕Δx）∕√Δx⟩是滤波器在x =nΔx时的输出样本。 如果f已被带宽限制（f∈VB），则系数恰好是f的样本，f [n] = f（nΔx）。 否则，在采样之前对f进行带宽限制以防止混叠。 必要的抗混叠滤波器隐含在VB上的正交投影中。

采样正弦函数

正弦函数cos 2𝜋𝜈0x的傅立叶变换是一对在±𝜈0处的脉冲。 也可以将此函数限制为B> 𝜈0的任何频带，但它不是平方可积的。 采样定理中对平方可积性的要求有两件事：它保证函数是有界且连续的，并且（请参见问题）提供了信号能量与样本平方之间的Parseval关系。 一个正弦曲线，甚至是有限的正弦曲线总和，也是有界且连续的，并且将具有定义明确的样本。 可以证明，正函数插值可以从其样本中恢复正弦函数。 但是，必须小心，不要以奈奎斯特速率Δx= 1 ∕ 2𝜈0采样正弦波，因为这恰好是零交叉点的间隔，并且样本有可能落在零交叉点处或附近。 ！

6.5.4离散傅立叶变换 2021年4月14日13点35分

离散时间傅里叶变换与傅里叶级数的对偶性使得可以容易地获得广义离散时间傅里叶变换的性质。 如果序列（f [n]）n∈ℤ在𝓁1中，则它具有傅立叶变换Fd（𝜃），该傅里叶变换Fd（𝜃）有界，连续且周期为2𝜋。 广义函数的扩展很简单：缓慢增长的序列（对于某些有限的C和N || f [n] | <C（1 + | n |）N）的傅立叶变换是周期广义函数。 这里有些例子。

f如果周期函数f（x）具有傅立叶系数（cn），则其导数f'（x）的傅立叶系数为i2𝜋n L cn。 针对离散时间傅立叶变换（L = 2 =）解释的反义词是，如果序列f [n]具有傅立叶变换Fd（𝜃），则nf [n]的傅立叶变换是（广义）导数， iFd'（𝜃）。

6.6 统一傅里叶族 2021年4月14日13点38分

6.6.1基函数和正交关系 2021年4月14日13点42分

DFT和Fourier级数在概念上被开发为基于三角函数的正交展开。 DFT的基本向量为{𝜙m} N m− = 1 0，其中

使用增量函数，我们现在可以将傅立叶变换和离散时间傅立叶变换解释为正交基上的展开。 显然，傅立叶变换的基本函数是复指数ei2𝜋𝜈x，其中𝜈是连续的而不是离散的索引。 正交条件表示为积分

在一般意义上不存在。 但是，应用变换对1 𝛿（𝜈）（等式6.12），我们对傅立叶变换基集{ei2𝜋𝜈x} 𝜈∈𝜈具有一个广义的正交关系：

对于离散时间傅立叶变换，基本函数为{ein𝜃} 𝜃∈ [-𝜋，𝜋）。 它们的正交关系是

6.6.2采样和复制

梳齿函数是其自身的变换，f III III⟷F ∗ III的事实表明，在一个域中进行采样始终会导致在另一个域中发生周期性。 令f为连续的非周期性函数，令F为傅立叶变换。 这是两个域都是连续的唯一傅立叶变换。 傅里叶级数在频域中是离散的，在时域中是周期性的。 离散时间傅立叶变换在时域中是离散的，而在频域中是周期性的。 DFT在两个域中都是离散的并且是周期性的。 通过采样和复制从连续时间傅立叶对f⟷F中获得这三个变换。

取样⟼复制。 fs（x）= f（x）⋅1ΔxIII（Δxx）的采样函数的傅立叶变换是F的周期复制：

脉冲采样函数也被编写

其中，f [n] = f（nΔx）。 通过直接计算，傅立叶变换为∑∞ n =-∞f [n] e-i2𝜋nΔx𝜈。 将此表达式与（f [n]）的离散时间傅立叶变换进行比较

如果设置analog = 2𝜋𝜈Δx，即从模拟频率到数字频率的通常映射，那么我们看到Fd与F ∗ III相同，即Fd是F的周期复制：

可以用以下方式表示：

如果f是带限的，则Fd | 𝜃∈ [-𝜋，𝜋）等于F ∕Δx，并且可以根据采样定理从其样本中恢复f（x）。

复制⟼采样。 周期复制函数f̃（x）= f（x）\* 1 LIII（Lx）的傅里叶变换为

周期函数具有线谱。 F的样本是f̃的傅立叶系数，cn = L1F（Ln）。

如果f的有界支持小于L，则f 1的一个周期等于f，并且可以通过类似于采样定理的内插法从傅立叶系数中恢复F。

复制，采样⟼采样，复制。 我们将注意力集中在L =NΔx的情况下，因此序列（f̃ [n]）=（f̃（nΔx））也将是周期性的。 我们知道f̃ ∑m cm𝛿（𝜈 − m ∕ L）。 然后采样f 1复制该变换，周期为1 1Δx= N ∕ L; 也就是说，傅立叶系数（cm）的序列被复制为周期N。在第m个频率𝜈 = m ∕ L = m ∕NΔx，傅立叶系数是系数的叠加：

正如预期的那样，这个新序列是周期性的。 只有N个系数是唯一的，例如c̃0到c̃N-1。 我们之前得到了（公式4.41）

其中F̃ [m]是单个周期的离散傅立叶变换，（f̃ [n]）N-1 n = 0。 因此，

采样的复制函数的傅立叶变换是DFT：

如果f是带限的，则DFT的值是相同的傅立叶系数，并且可以通过采样定理从f 1 [n]中恢复f 1。 但是，不可能同时对f进行带宽限制和有限的支持，因此无法从复制的样本f̃ [n]中恢复未复制的f（x）。

采样，复制⟼复制，采样。 我们知道（f [n]）⟼Fd（𝜃）。 然后以周期L =NΔx复制样本序列，然后以采样间隔Δ𝜈 = 1 ∕NΔx对傅里叶变换进行采样。 使用连续到离散频率映射，这等效于以Δ𝜃 = 2𝜋Δ𝜈Δxx = 2𝜋 ∕ N采样Fd（𝜃）：

样本序列（Fd（2 ^ m ∕ N））是周期性的，正如预期的那样，Fd（2 ^（m + N）∕ N）= Fd（2 ^ m ∕ N）。 只需N个样本即可完整描述函数，例如Fd（0）到Fd（2𝜋（N − 1）∕ N）。 这些值与（f̃ [n]）的DFT相同：

复指数在周期为N的k中是周期性的，因此我们可以写k = n + rN并重写总和：

复制的采样函数的傅立叶变换也是DFT：

这些表明可以按照任意顺序进行采样和复制，即（f（x）\*N1ΔxIII（NxΔx））⋅Δ1xIII（Δxx）=（f（x）⋅Δ1xIII（Δxx））\*N1ΔxIII（Nx Δx）问题的直接证明。 四个傅立叶变换之间的连接可以合并为一个图（图6.21）。